

CBS

Colegio Bautista Shalom



Matemática 2

Segundo Básico

Primer Bimestre

Contenidos**ÁLGEBRA**

- ✓ NOTACIÓN ALGEBRAICA.
- ✓ SIGNOS ALGEBRAICOS DE OPERACIÓN, DE RELACIÓN Y DE AGRUPACIÓN.
 - SIGNOS DE OPERACIÓN.
 - SIGNOS DE RELACIÓN.
 - SIGNOS DE AGRUPACIÓN.
- ✓ TÉRMINO ALGEBRAICO Y SUS PARTES.
- ✓ CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS POR SU NÚMERO DE TÉRMINOS.
- ✓ GRADO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.
- ✓ JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES.
- ✓ LENGUAJE ALGEBRAÍCO.
- ✓ ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS Y FRACCIONARIOS.
- ✓ PRODUCTO DE MONOMIOS.
- ✓ PRODUCTO DE POLINOMIOS.
- ✓ DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.
- ✓ DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO.
- ✓ POLINOMIOS OPUESTOS.

PRODUCTOS NOTABLES

- ✓ PROCESO ABREVIADO.
- ✓ CUADRADO DE UN BINOMIO.
- ✓ PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS.
- ✓ PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO EN COMÚN.

POLÍGONOS, CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

- ✓ POLÍGONOS.
- ✓ CUADRILÁTEROS.
- ✓ POLÍGONOS REGULARES.
- ✓ ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR.
- ✓ CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.
 - ÁREA Y PERÍMETRO.
 - LONGITUD Y ÁREA DE FIGURAS CIRCULARES.
 - ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR.
 - ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar uno de los ejercicios. Copia cada ejercicio en hojas en blanco bond y entrégalas a tu catedrático(a).

ÁLGEBRA

Así como la aritmética surgió de la necesidad de contar, medir el tiempo y administrar recursos, el álgebra nació como una herramienta para expresar relaciones generales entre cantidades. Su desarrollo fue más tardío, pues el ser humano necesitó alcanzar un pensamiento más abstracto para representar números no solo como valores fijos, sino como símbolos variables.

Aunque diferentes culturas como la babilónica, india y griega aportaron ideas fundamentales, el gran impulso llegó en el siglo IX d.C. gracias al matemático persa Al-Juarismi, cuyo nombre dio origen al término “algoritmo”. Su obra sentó las bases del álgebra moderna, permitiendo resolver problemas de manera general y no únicamente con números específicos. Este avance abrió el camino para el desarrollo de métodos más sofisticados que transformaron la forma en que se razonan y resuelven problemas matemáticos.

El álgebra es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre cantidades utilizando símbolos, letras y números. A diferencia de la aritmética —que trabaja únicamente con valores fijos—, el álgebra permite generalizar situaciones y construir expresiones o fórmulas que se aplican a muchos casos. Gracias a esta característica, es posible describir con exactitud procesos repetitivos, patrones numéricos, relaciones entre magnitudes y fenómenos naturales o sociales.

Por ejemplo, mientras en aritmética se afirma $7 + 5 = 12$, en álgebra se escribe $a + b = c$, donde a , b y c pueden representar cualquier número. Esto significa que la expresión algebraica no depende de valores específicos, sino que es válida para infinitas combinaciones numéricas. Esta capacidad de generalizar es lo que convierte al álgebra en una herramienta esencial para el razonamiento lógico y el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

El álgebra se utiliza para resolver problemas en los que no siempre se conocen todos los valores desde el inicio, permitiendo trabajar con representaciones simbólicas que luego se pueden sustituir por valores reales. Esta forma de razonar amplía enormemente las posibilidades de análisis y solución de situaciones matemáticas y reales, lo que explica su importancia dentro del currículo escolar y su aplicación en múltiples áreas del conocimiento humano.

NOTACIÓN ALGEBRAICA

En álgebra se utilizan números y letras para representar cantidades. Los números representan valores conocidos, como 2, 5, 10 o 0.5, mientras que las letras representan valores desconocidos, variables o parámetros. Por lo general, se emplean las letras iniciales del

alfabeto (a, b, c, d...) para cantidades conocidas y las letras finales (x, y, z...) para cantidades desconocidas o variables. Para diferenciar valores representados por la misma letra, se utilizan apostrofes (a', a'', a''') que se leen a prima, a segunda, a tercera, o también subíndices (a_1 , a_2 , a_3), que se leen a subuno, a subdos, a subtres. Esta notación algebraica es fundamental para poder formular relaciones generales de manera clara y ordenada.

Una fórmula algebraica es la representación, mediante letras y números, de una regla o principio general. Por ejemplo, la fórmula $P = 2l + 2a$ representa el perímetro de un rectángulo, donde l es el largo y a el ancho; $A = (b \times h) / 2$ representa el área de un triángulo, donde b es la base y h la altura; $d = v \times t$ representa la distancia recorrida, donde d es la distancia, v la velocidad y t el tiempo. Las fórmulas algebraicas permiten expresar de forma sencilla relaciones que se repiten constantemente en distintas situaciones de la vida real y en la naturaleza.

El álgebra no se limita a las aulas de clase ni a ejercicios numéricos. Es una herramienta que se aplica en numerosos ámbitos de la vida cotidiana. En economía, permite calcular intereses, presupuestos y costos. En ingeniería y construcción, se utiliza para determinar longitudes, áreas, volúmenes y cargas estructurales. En física y mecánica, sirve para relacionar variables como distancia, tiempo y velocidad. En química, ayuda a modelar reacciones y en biología, a comprender el crecimiento de poblaciones. Incluso en la informática, el álgebra es la base para la creación de algoritmos y programas.

Un ejemplo sencillo de aplicación práctica sería el cálculo del costo de un servicio. Supongamos que un fontanero cobra Q150 por la visita más Q75 por cada hora de trabajo. Si se representa el número de horas con la letra h , el costo total puede expresarse mediante la fórmula $C = 150 + 75h$. Si trabaja cinco horas, entonces $C = 150 + 75(5) = 525$. Esta representación algebraica no solo permite resolver este caso en particular, sino que sirve para cualquier número de horas.

SIGNOS ALGEBRAICOS DE OPERACIÓN, DE RELACIÓN Y DE AGRUPACIÓN

Con las cantidades algebraicas se efectúan las mismas operaciones que con las aritméticas, es decir: suma o adición, resta, multiplicación o producto, división, potenciación, radicación, logaritmación, etc.

SIGNOS DE OPERACIÓN

- ✓ En la suma se utiliza el signo (+). Así, por ejemplos $x+y$ se leerá “equis más ye”.
- ✓ En la resta se utiliza el signo (-). Así, por ejemplo $x-y$ se leerá “equis menos ye”.

- ✓ En la multiplicación se utiliza el símbolo multiplicado por (x) ó (×). Así, por ejemplo $x \times y = x \times y$ se leerá “equis multiplicado por ye”. El signo suele omitirse cuando los factores están indicados por letras o bien por letras y números.

Por ejemplo $x \times y \times z = x \times y \times z = xyz$

En la división se utiliza el signo dividido entre (:)(,) ó (/). Así, por ejemplo $x:y = x/y = x,y$ y se leerá “equis dividido entre ye”.

En la potenciación se utiliza un superíndice denominado exponente que se sitúa arriba y a la derecha de una cantidad llamada base por sí misma. Así, por ejemplo $x^4 = x \times x \times x \times x \dots$ (4 veces) y se leerá “equis elevado a la ye”. En el caso de que una letra no lleve exponente se sobreentiende que el exponente es uno.

En la radicación se utiliza el signo radical ($\sqrt{\quad}$), debajo del cual se coloca la cantidad a la que se le extrae la raíz. Así, por \sqrt{x} , se leerá “raíz cuadrada de equis”; $\sqrt[3]{x}$ “raíz cúbica de equis” y así sucesivamente.

SIGNOS DE RELACIÓN

Los signos de relación se utilizan para indicar la relación que hay entre dos cantidades.

- ✓ El signo = se lee igual a. $x=y$ se leerá “equis igual a ye”.
- ✓ El signo \neq se lee diferente de. $x \neq y$ se leerá “equis diferente de ye”.
- ✓ El signo $>$ se lee mayor que. $x > y$ se leerá “equis mayor que ye”.
- ✓ El signo $<$ se lee menor que. $x < y$ se leerá “equis menor que ye”.
- ✓ El signo \geq se lee mayor que o igual.
- ✓ El signo \leq se lee menor que o igual.

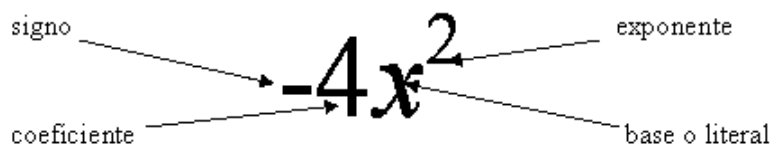
SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación más utilizados son: los paréntesis (), los corchetes [] y las llaves { }. Los signos de agrupación indican que la operación encerrada en su interior debe efectuarse en primer lugar.

TÉRMINO ALGEBRAICO Y SUS PARTES

Se llama término a toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos + o -. Así, por ejemplo xy^2 es un término algebraico.

En todo término algebraico pueden distinguirse cuatro elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.



Signo. Los términos que van precedidos del signo + se llaman términos positivos, en tanto los términos que van precedidos del signo – se llaman términos negativos. Pero, el signo + se acostumbra omitir delante de los términos positivos; así pues, cuando un término no va precedido de ningún signo se sobreentiende de que es positivo.

Coeficiente. Se llama coeficiente al número o letra que se le coloca delante de una cantidad para multiplicarla. El coeficiente indica el número de veces que dicha cantidad debe tomarse como sumando. En el caso de que una cantidad no vaya precedida de un coeficiente numérico se sobreentiende que el coeficiente es la unidad.

Parte literal. La parte literal está formada por las letras que haya en el término.

Grado. El grado de un término con respecto a una letra es el exponente de dicha letra. Así, por ejemplo el término x^3y^2z , es de tercer grado con respecto a x , de segundo grado con respecto a y , y de primer grado con respecto a z .

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS POR SU NÚMERO DE TÉRMINOS

Monomios: Son aquellos que constan de un solo término, en la que números y letras están ligadas por la operación multiplicar.

$$5x, -3ab, \frac{x^2z}{2y}, -\frac{2a^3x}{7b}, \sqrt{3ab^3}$$

Polinomios: Son aquellos que constan de más de un término, es decir, es la suma algebraica de dos o más monomios. $2a+b$, $3x^2-5y+z$, $2x^3-7x^2-3x+8$

1. Binomio.- Polinomio de dos términos: $5x^2-3y^2$, $u+at$, $4a^2b+x^2y^6$,

2. Trinomio.- Polinomio de tres términos: $x+y+z$, $2ab-3a^2+5b^2$, $m-2n-8$

Término nulo: Si el coeficiente de un término es cero, se tiene un término cuyo valor absoluto es cero o nulo.

$$(0)x^2y = 0$$

$$(0)a^2 = 0$$

Como los polinomios están constituidos por:

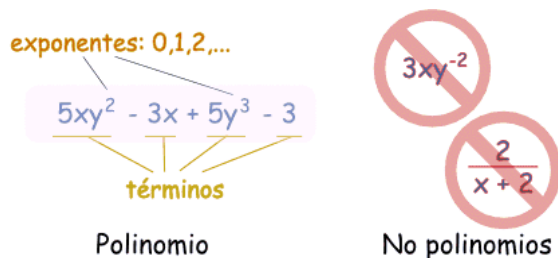
- ✓ Constante (como **3**, **-20**, o **1/2**).
- ✓ Variables (como **x** e **y**).
- ✓ Exponentes (como el 2 en y^2) pero sólo pueden ser: **0, 1, 2, 3, ... etc.**

Pueden ser combinados usando:

$$\begin{array}{c} + \quad - \\ \times \end{array} \quad \text{Sumas, restas y multiplicaciones... ¡pero no divisiones!}$$

Estas reglas hacen que los polinomios sean simples, ¡así es fácil trabajar con ellos!

¿SON POLINOMIOS O NO?



Estos **son** polinomios:

- ✓ **3x**
- ✓ **x - 2**
- ✓ **3xyz + 3xy²z - 0.1xz - 200y + 0.5**

Y estos **no** son polinomios:

- ✓ **2/(x+2)** no lo es, porque dividir no está permitido
- ✓ **3xy⁻²** no lo es, porque un exponente es "-2" (los exponentes sólo pueden ser: 0, 1, 2,...)

Pero esto **sí** está permitido:

- ✓ **x/2 está permitido**, porque también es $(\frac{1}{2})x$ (la constante es $\frac{1}{2}$, o 0.5).
- ✓ también **3x/8** por la misma razón (la constante es $\frac{3}{8}$, o 0.375).

GRADO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El exponente de mayor orden de la variable se conoce como grado del polinomio. Para encontrar el grado de un polinomio, basta examinar cada término y hallar el exponente de mayor orden de la variable. Por lo tanto, el grado de $3x^2 + 5x^4 - 2$ se halla examinando el exponente de la variable en cada término.

El exponente en $3x^2$ es 2

El exponente en $5x^4$ es 4

El exponente en -2 es 0, porque $-2 = -2x^0$ ($x^0 = 1$)

Entonces el grado de $3x^2 + 5x^4 - 2$ es 4, el exponente de mayor orden de la variable en el polinomio.

De manera semejante, el grado de $4y^3 - 3y^5 + 9y^2$ es 5, puesto que 5 es el exponente de mayor orden de una variable presente en el polinomio.

Por convención, un número como -4 o 7 se conoce como polinomio de grado 0, porque si $a \neq 0$, $a = ax^0$.

El grado de un polinomio puede ser “absoluto” o “relativo” a una literal.

Grado absoluto: el grado absoluto de un polinomio se determina por el exponente mayor, de uno de sus términos.

$$a^4 - 5a^3 + 7a^2 + 3a + 1$$

El grado absoluto es cuatro.

$$2x^5 + 6x^3y^5 + 2x^2y^6 - 4x$$

El grado absoluto es sexto.

$$2ab - a^2b^3 + 3a^3b^3 + 5b^5$$

El grado absoluto es quinto.

Grado relativo a una literal: el grado relativo de un polinomio con respecto a una literal, es el mayor exponente que tiene la literal que se considere del polinomio.

$$xy^7 + x^4y^3 - x^2y^4 - 4x$$

relación a y .

$$a^5 + 2a^2b - 7ab^2 - 8$$

relación a b .

El grado con relación a x es séptimo, de quinto grado con

El grado con relación a a es tres, de segundo grado con

Polinomio cero: el mismo número 0 se conoce como polinomio cero y no se le asigna grado. Se hace notar que $0 \times x^4 = 0$, $0 \times x^2 = 0$, $0 \times x^3 = 0$, y así sucesivamente de modo que los polinomios cero no pueden tener grado.

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

1. Se efectúa toda operación que se encuentre entre paréntesis o arriba o debajo de una raya de fracción.
2. Se efectúan todas las operaciones de multiplicación o división en el orden que se presenten de izquierda a derecha.
3. Se efectúan las sumas y las restas en el orden de izquierda a derecha.

Ejemplo:

Resuelve $2a^2bc^3$, cuando $a=2$, $b=3$ y $c=1$

$$2(2)^2 \times (3) \times (1)^3 = 2(4) \times (3) \times (1) = 24$$

Ejemplo:

Evaluar $4\sqrt{bx^3}$, cuando $b=8$ y $x=2$

$$4\sqrt{(8) \cdot (2)^3} = 4\sqrt{(8) \cdot (8)} = 4(8) = 32$$

Ejemplo:

Evaluar $\frac{8a}{x} + \frac{5b^2}{y} - \frac{2a^2b}{x^2y}$ cuando $a=1$, $b=2$, $y=4$ y $x=3$.

$$\frac{8(1)}{3} + \frac{5(2)^2}{4} - \frac{2(1)^2(2)}{(3)^2(4)} = \frac{8(1)}{3} + \frac{5(4)}{4} - \frac{2(1)(2)}{(9)(4)} = \frac{8}{3} + 5 - \frac{4}{36} = \frac{96 + 180 - 4}{36} = \frac{272}{36} = 7\frac{5}{9}$$

Ejemplo:

Resuelve $\frac{4x+6}{2}$ para $x=3$.

$$\frac{4(3)+6}{2} = \frac{(4 \times 3)+6}{2} = \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Ejemplo:

Resuelve $xy+3y$ para $x=2$ $y=3$.
 $(2)(3)+3(3) = 6+9 = 15$

Ejemplo:

Evaluar $\frac{5w-3z}{w+2z}$ cuando $w = -4.2$ $z = 3.6$

$$\frac{5w-3z}{w+2z} = \frac{5(-4.2)-3(3.6)}{-4.2+2(3.6)} = \frac{-21-10.8}{-4.2+7.2} = \frac{-31.8}{3} = -10.6$$

LENGUAJE ALGEBRAÍCO

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y por paréntesis.

Por ejemplo:

$$3+2 \cdot x^2-x \quad \text{o} \quad x \cdot y-32 \cdot (x \cdot y^2-y)$$

Las letras representan valores que no conocemos y podemos considerarlas como la generalización de un número. A estas las llamamos *variables*. Veamos otros ejemplos de forma ilustrada (imagen derecha):

En la imagen, a la izquierda se pueden ver dos ejemplos en los que se aplica la propiedad distributiva

The diagram illustrates algebraic properties and distributive property examples. It is divided into two main sections: the left section shows the distributive property applied to two expressions, and the right section shows two examples of algebraic expressions with their corresponding verbal descriptions.

Left Section: Distributive Property Examples

- Example 1:** $(2x+y+1)(y) = 2xy+y^2+y$. The diagram shows a grid with columns labeled y , xy , xy , and y^2 . Below the grid, the terms 1 , x , x , and y are listed.
- Example 2:** $(x+1)(x+y+1) = x^2+xy+2x+y+1$. The diagram shows a grid with columns labeled y , xy , x , x^2 , and 1 . Below the grid, the terms 1 , x , x , and y are listed.

Right Section: Algebraic Expressions and Verbal Descriptions

- Example 3:** $3 \cdot (x-y)$. The diagram shows a grid with columns labeled 3 , x , and y . Below the grid, the terms 1 , x , and y are listed. The verbal descriptions are: "El triple" (The triple), "La mitad" (The half), "Menos el doble" (Less the double), "del cuadrado del cubo de x e y" (of the square of the cube of x and y), "de x menos y" (of x minus y), "de x por y" (of x times y), and "del inverso" (of the inverse).
- Example 4:** $\sqrt{x \cdot y}$. The diagram shows a grid with columns labeled x and y . Below the grid, the terms 1 and x are listed. The verbal descriptions are: "El triple" (The triple), "La mitad" (The half), "Menos el doble" (Less the double), "Menos el triple" (Less the triple), "Menos la mitad" (Less the half), "La raíz" (The root), "27 por ciento" (27 percent), "del cuadrado del cubo de x e y" (of the square of the cube of x and y), "de x menos y" (of x minus y), "de x por y" (of x times y), and "del inverso de x entre y" (of the inverse of x divided by y).

del producto respecto a la suma, el gráfico explica esta propiedad que se utilizará en este tema.

Observa detenidamente cada área (de los rectángulos) y construye figuras similares para aplicar esta propiedad. A la derecha se muestran dos expresiones algebraicas, ¿sabrías construir las diferentes expresiones que se obtienen al mover las listas grises?

Por ejemplo, el 27 por ciento del cuadrado será:

$$0,27 x^2$$

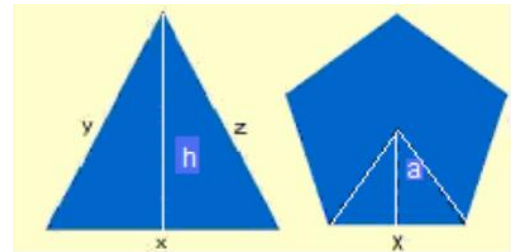
¿CÓMO SE OBTIENEN?

Pretendemos transformar un enunciado, donde hay uno o varios valores que no conocemos, en una expresión algebraica. Cada uno de los valores (variables) que no conocemos lo representaremos por una letra diferente.



Nota

El signo de multiplicar se sobreentiende delante de una letra o un paréntesis. Así, $3 \cdot a$ es equivalente a $3a$, y $3 \cdot (2+x)$ es equivalente a $3(2+x)$.



El perímetro del triángulo es $x+y+z$

El área del triángulo es $\frac{x \cdot h}{2}$

El perímetro del pentágono $5x$

El área del pentágono $\frac{5xa}{2}$

Por ejemplo:

El número x es tres unidades mayor que y se expresa $\rightarrow x = y + 3$.

El triple de un número menos el doble de otro se expresa $\rightarrow 3x - 2y$.

EJERCICIO 01: conforme a las opciones que se te presentan como posibles respuestas; escoge, justifica tus respuestas.

Expresión algebraica 01. El doble de un número menos siete.

- A) $2x - 7$
- B) $2x + 7$
- C) $x - 7$
- D) $2(x - 7)$

Respuesta:

Expresión algebraica 02. La tercera parte de un número menos 8.

- A) $\frac{x}{3} - 8$
- B) $\frac{x-8}{3}$
- C) $3x - 8$
- D) $x - \frac{8}{3}$

Respuesta:

Expresión algebraica 03. La tercera parte de un número menos 8.

- A) $\frac{x+12}{2}$
- B) $\frac{x}{2} + 12$
- C) $\frac{12}{x+2}$
- D) $x + \frac{12}{2}$

Respuesta:

Expresión algebraica 04. La semisuma de dos números menos 5.

- A) $\frac{x+y}{2} - 5$
- B) $\frac{x-y}{2} - 5$
- C) $\frac{x+y-5}{2}$
- D) $\frac{5}{x+y}$

Respuesta:

Expresión algebraica 05. La mitad del producto de 2 números.

- A) $\frac{x-6}{3}$
- B) $\frac{x}{3} - 6$
- C) $3x - 6$
- D) $\frac{6-x}{3}$

Respuesta:

Expresión algebraica 06. La raíz cuadrada de la suma de 2 cuadrados.

- A) $\frac{x-4}{2}$
- B) $\frac{x}{2} - 4$
- C) $2(x - 4)$
- D) $\frac{4-x}{2}$

Respuesta:

Expresión algebraica 07. El 25% de un número.

A) $0.25x$

B) $\frac{25}{100}x$

C) $\frac{25}{x}$

D) $25x$

Respuesta:

Expresión algebraica 08. El cuadrado de la diferencia de 2 números.

A) $(x - y)^2$

B) $x^2 - y^2$

C) $x - y^2$

D) $x^2 - y$

Respuesta:

Expresión algebraica 09. El cuadrado de la semidiferencia de 2 números.

A) $\frac{x - y}{2}$

B) $\frac{(x - y)^2}{2}$

C) $\left(\frac{x - y}{2}\right)^2$

D) $x - \frac{y^2}{2}$

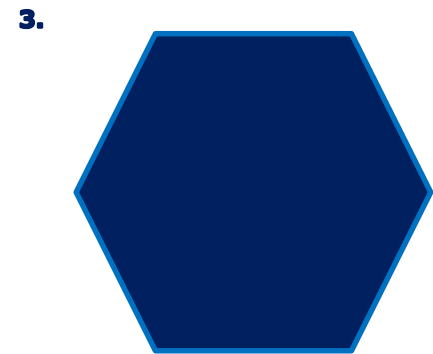
Respuesta:

Expresión algebraica 10. La media aritmética de tres números.

A) $\frac{a + b + c + d}{4}$
 B) $\frac{a + b + c + d}{2}$
 C) $\frac{a + b + c + d}{4}$
 D) $a + b + c + d$

Respuesta:

EJERCICIO 02: encuentra las expresiones algebraicas que den el perímetro y área de las siguientes figuras geométricas.



Perímetro: _____
 Área: _____

Perímetro: _____
 Área: _____

Perímetro: _____
 Área: _____

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS Y FRACCIONARIOS

SUMA Y RESTA

La suma de monomios y polinomios es asunto de combinar términos semejantes.

MONOMIOS

Tres peras y dos peras son 5 peras. Pero 3 peras y 2 manzanas no son 5 peras ni 5 manzanas, son 3 peras + 2 manzanas.



Lo mismo ocurre con los monomios. Si dos monomios son semejantes, sumamos o restamos los coeficientes y dejamos el mismo literal. Si no son semejantes, esta operación no puede expresarse de manera más simplificada.

$3x+2x=5x$, pero las expresiones $3x^2+2x$ o $2x+7y$ no se pueden simplificar.

$2x^7y^3 + 6x^7y^3$
Monomios semejantes, por tanto se suman los coeficientes

$$8x^7y^3$$

$2x^7y^3 - 6x^7y^3$
Para restarlos se procede se forma similar,

$$-4x^7y^3$$

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$
Monomios no semejantes, por tanto la expresión no se puede simplificar, el resultado es

$$2x^7y^3 + 6x^5y^3$$

Análogamente
es

$$2x^7y^3 - 6x^5y^3$$

EJERCICIO 03: resuelve las siguientes sumas y(o) restas de monomios. En tu cuaderno y preséntalo a tu catedrático/a.

1. $3x^2 + 5x^2 =$

2. $10y^3 - 5y^3 =$

3. $2xy^2 + 12xy^2 + 10xy^2 =$

4. $54abc^2 - 50abc^2 =$

5. $mn + mn =$

6. $4y^2 + 6y^2 =$

7. $-3x^5 - 5x^5 =$

8. $3y^3 - y^3 =$

9. $35ab - 15ab =$

10. $13x^4 + 15x^4 =$

11. $\frac{1}{7}v^3 + \frac{3}{7}v^3 =$

12. $\frac{5}{8}v^3 - \frac{1}{8}v^3 = \frac{4}{8}v^3 =$

13. $\frac{10}{3}a + \frac{11}{3}a = \frac{21}{3}a =$

14. $\frac{2}{5}xy + \frac{6}{5}xy =$

15. $3abc + 2abc =$

MONOMIOS Y POLINOMIOS

SUMA

Ejemplo:

Supongamos que se desea sumar $3x^2 + 7x - 3$ y $5x^2 - 2x + 9$; es decir deseamos encontrar,

$$(3x^2 + 7x - 3) + (5x^2 - 2x + 9)$$

Al aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva podemos escribir:

$$\begin{aligned}(3x^2 + 7x - 3) + (5x^2 - 2x + 9) &= (3x^2 + 5x^2) + (7x - 2x) + (-3 + 9) \\ &= (3 + 5)x^2 + (7 - 2)x + (-3 + 9) \\ &= 8x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

Ejemplo:

De manera semejante, la suma de $4x^3 + \frac{3}{7}x^2 - 2x + 3$ y $6x^3 - \frac{1}{7}x^2 + 9$, se escribe como:

$$\begin{aligned}\left(4x^3 + \frac{3}{7}x^2 - 2x + 3\right) + \left(6x^3 - \frac{1}{7}x^2 + 9\right) &= (4x^3 + 6x^3) + \left(\frac{3}{7}x^2 - \frac{1}{7}x^2\right) + (-2x) + (3 + 9) \\ &= 10x^3 + \frac{2}{7}x^2 - 2x + 12\end{aligned}$$

Ejemplo:

Para sumar $-3x + 7x^2 - 2$ y $-4x^2 - 3 + 5x$; primero escribimos ambos polinomios en orden descendente, colocamos los términos semejantes en una columna y luego sumamos

$$\begin{aligned}(7x^2 - 3x - 2) + (-4x^2 + 5x - 3) &= (7x^2 - 4x^2) + (-3x + 5x) + (-2 - 3) \\ &= 3x^2 + 2x + (-5) \\ &= 3x^2 + 2x - 5\end{aligned}$$

Ejemplo:

Del mismo modo que en aritmética, podemos sumar o restar más de dos polinomios.

Por ejemplo, para sumar los polinomios $-7x + x^2 - 3$, $6x^2 - 8 + 2x$ y $3x - x^2 + 5$, escribimos cada polinomio en orden descendente con los términos semejantes en la misma columna y sumamos:

$$\begin{aligned}(-7x + x^2 - 3) + (6x^2 - 8 + 2x) + (3x - x^2 + 5) &= (x^2 - 7x - 3) + (6x^2 + 2x - 8) + (-x^2 + 3x + 5) \\ &= (x^2 + 6x^2 - x^2) + (-7x + 2x + 3x) + (-3 - 8 + 5) \\ &= 6x^2 + (-2x) + (-6) \\ &= 6x^2 - 2x - 6\end{aligned}$$

RESTA

Recordemos que $a - (b + c) = a - b - c$

Para eliminar los paréntesis de una expresión precedida por un signo menos (de resta) debemos cambiar el signo de cada término dentro del paréntesis. Esto es lo mismo que multiplicar cada término dentro de los paréntesis por -1.

Ejemplo:

Efectuar la operación $(3x^2 - 2x + 1) - (4x^2 + 5x + 2) =$

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 1) - (4x^2 + 5x + 2) &= 3x^2 - 2x + 1 - 4x^2 - 5x - 2 \\ &= (3x^2 - 4x^2) + (-2x - 5x) + (1 - 2) \\ &= -x^2 - 7x + (-1) \\ &= -x^2 - 7x - 1 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Resolver $\frac{2}{5}x^2y - \left(-\frac{3}{10}x^2y\right)$

$$\frac{2}{5}x^2y - \left(-\frac{3}{10}x^2y\right) = \frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{10}x^2y = \frac{4+3}{10}x^2y = \frac{7}{10}x^2y$$

Ejemplo:

Restar $8x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2$ y $4x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2$

$$\begin{aligned} (8x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2) - (4x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2) &= 8x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 - 4x^4 + 2x^3y - 5x^2y^2 \\ &= 4x^4 - 3x^3y - 2x^2y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Restar $\frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{1}{6}x^3$ y $\frac{1}{6}x^2y - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{4}x^3$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 \\ - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^2y + \frac{1}{3}xy^2 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2y + \frac{7}{12}xy^2$$

EJERCICIO 04: resuelve las siguientes sumas y(o) restas entre polinomios y escribe con lapicero negro la respuesta en el subrayado.

Sean los polinomios:

$$P(x) = 5x^2 - 7x + 3$$

$$Q(x) = -5x^2 + 2x$$

$$R(x) = x^3 + x^2 + 2$$

$$U(x) = x^4 + x^2 + 2$$

$$V(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$W(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

$$Z(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

$$3x^2 + 4x + 5$$

$$M(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 6$$

$$N(X) = x^5 + x^4 +$$

Realiza las siguientes operaciones:

1) $P(x) + Q(x) =$

2) $P(x) + R(x) =$

3) $Q(x) + R(x) =$

4) $U(x) - V(x) =$

5) $W(x) - Z(x) =$

6) $M(x) - N(x) =$

7) $V(x) + W(x) =$

8) $R(x) + U(x) =$

9) $Q(x) + P(x) =$

10) $Z(x) + Q(x) =$

11) $P(x) - Q(x) =$

12) $M(x) - U(x) =$

13) $U(x) + N(x) =$

14) $P(x) - Q(x) =$

15) $R(x) - W(x) =$

PRODUCTO DE MONOMIOS

El producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales.

Recuerda la propiedad: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Por ejemplo:

$$(3x^2y) \cdot (2x) = (3 \cdot 2)x^2yx = 6x^{2+1}y = 6x^3y$$

$\left\{ \frac{3}{2} x^3 y^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{2}{5} x^3 y \right\}$
Multiplicamos los coeficientes: $\left\{ \frac{3}{2} \right\} \cdot \left\{ \frac{2}{5} \right\} = \frac{3}{5}$
Multiplicamos los literales: $\left\{ x^3 y^2 \right\} \cdot \left\{ x^3 y \right\} =$
 $= x^6 y^3$
Resultado
 $\frac{3}{5} x^6 y^3$

EJERCICIO 05: resuelve las siguientes multiplicaciones entre monomios. En tu cuaderno y preséntalo a tu catedrático/a.

- | | | |
|-------------------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. $(3x^2)(5x^3) =$ | 2. $(2ab^2)(17a^3b) =$ | 3. $(2x^2y)(3xy^2) =$ |
| 4. $(9a^4b^3c^2)(3a^3b^2c) =$ | 5. $(2ab^2)(17a^3b) =$ | 6. $(-2y)(-3y^2) =$ |
| 7. $(3x^2)(5x^3) =$ | 8. $(8x^5)(4x^2) =$ | 9. $(13z^2)(-5z^3) =$ |
| 10. $(20x^2y^2)(5x^3y^4) =$ | 11. $(2x^2)(5x^2) =$ | 12. $(-9m^2)(5n^3) =$ |
| 13. $(3x^2)(5x^3) =$ | 14. $(10x^5)(5x^6) =$ | 15. $(3x^2)(5x^3) =$ |

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Sencillo, el producto de polinomios o entre polinomios se realiza multiplicando todos los términos de uno de ellos por todos los términos del otro. Se aplica la Propiedad distributiva entre en la multiplicación y la suma. Previo al aprendizaje de los polinomios, en ocasiones ya has aprendido a multiplicar "expresiones algebraicas", que son polinomios.

Incluso en las ecuaciones, por ejemplo:

$(x + 5)(x - 3)$ es una multiplicación de dos polinomios de grado 1

$2x(x + 1)$ es una multiplicación de dos polinomios de grado 1

Y en general, al hacer esas operaciones "distributivas"; ya aprendes antes de ver el tema "Polinomios". Lo que haces es "multiplicar todo con todo", es decir, cada término de una expresión con cada término de la otra:

$$(x + 5)(x - 3) = x \cdot x - 3 \cdot x + 5 \cdot x - 15 = x^2 - 3x + 5x - 15 =$$

Y luego "agrupar las x con las x, los números con los números, las x^2 con las x^2 ...". Agrupar no es más que, "hacer la cuenta entre los números que tienen delante". En este ejemplo sólo tenemos para agrupar las x.

Son: $-3 + 5 = 2$. Es decir que quedan $2x$.

Como otro número no hay, queda -15 . Y como otra x^2 no hay, queda x^2 . Eso de juntar se ve también la suma de polinomios: "juntar las x con las x, los números con los números..." es en realidad "sumar los términos semejantes o de igual grado".

$$= x^2 + 2x - 15$$

Y multiplicar a dos polinomios no es otra cosa que aplicar la Propiedad Distributiva de la Multiplicación con la suma a esos dos polinomios. Es lo mismo que se hacía en las ecuaciones, pero ahora los polinomios pueden ser de grados mayores que 1, y tener muchos términos.

Por ejemplo:

$$P(A) = -9x^3 + x + 4x^5$$

$$P(B) = 3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 5x$$

$$(-9x^3 - x + 4x^5)(3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 5x) =$$

Se trata, como antes, de multiplicar cada término de uno por todos los términos del otro. Eso es aplicar la propiedad distributiva. Las multiplicaciones que hay que hacer son:

$(-9x^3)(+3x^2) = -27x^5$	$(-x)(+3x^2) = -3x^3$	$(+3x^5)(+3x^2) = +9x^7$
$(-9x^3)(+2x^4) = -18x^7$	$(-x)(+2x^4) = -2x^5$	$(+3x^5)(+2x^4) = +6x^9$
$(-9x^3)(-8) = +72x^3$	$(-x)(-8) = +8x$	$(+3x^5)(-8) = -24x^5$
$(-9x^3)(-x^3) = +9x^6$	$(-x)(-x^3) = +x^4$	$(+3x^5)(-x^3) = -3x^8$
$(-9x^3)(+5x) = -45x^4$	$(-x)(+5x) = -5x^2$	$(+3x^5)(+5x) = +15x^6$

Luego; el resultado de la multiplicación lo forman todos esos términos:

$-27x^5 - 18x^6 + 72x^3 + 9x^6 - 45x^4 - 3x^3 - 2x^5 + 8x + x^4 - 5x^2 + 9x^7 + 6x^9 - 24x^5 - 3x^8 + 15x^6 =$
 Pero quedaron términos del mismo grado, o "semejantes", entonces se los puede "agrupar" (es decir, "sumar" sus coeficientes), para que quede un solo término de cada grado. Primero es necesario cambiar el orden de los términos para que se vean agrupados los que se pueden "agrupar":

$$-27x^5 - 24x^5 - 2x^5 - 18x^6 + 9x^6 + 15x^6 + 72x^3 - 3x^3 - 45x^4 + x^4 + 8x - 5x^2 + 9x^7 + 6x^9 - 3x^8 =$$

Finalmente, se reduce a un solo término de cada grado, sumando sus coeficientes, como ya lo has aprendido en la suma y/o resta de polinomios:

$$-53x^5 + 6x^6 + 69x^3 - 44x^4 + 8x - x^2 + 9x^7 + 6x^9 - 3x^8$$

...porque:

$$-27 - 24 - 2 = -53$$

$$-18 + 9 + 15 = 6$$

$$72 - 3 = 69$$

$$-45 + 1 = -44$$

Al momento de realizar la multiplicación de forma apilada o en columna debes seguir determinados pasos.

Observa el siguiente ejemplo:

$$(3a^2 + 2b)(4a^2 + 3b)$$

1. Se colocan los factores en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2b \\ 4a^2 + 3b \\ \hline \end{array}$$

2. Se multiplica uno de los términos del segundo factor por cada uno de los términos del primero.

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2b \\ 4a^2 + 3b \\ \hline 12a^4 + 8a^2b \end{array}$$

3. Se multiplica el siguiente factor; los productos deben colocarse anotando en una columna los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2b \\ 4a^2 + 3b \\ \hline 12a^4 + 8a^2b \\ 9a^2b + 6b^2 \end{array}$$

4. Después se suman estos términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2b \\ 4a^2 + 3b \\ \hline 12a^4 + 8a^2b \\ 9a^2b + 6b^2 \\ \hline 12a^4 + 17a^2b + 6b^2 \end{array}$$

De donde se concluye que:

$$(3a^2 + 2b)(4a^2 + 3b) = 12a^4 + 17a^2b + 6b^2$$

Ahora, realicemos la multiplicación:

$$(4a + 2b)(3a - 6c)$$

Se alinean en forma vertical los factores:

$$\begin{array}{r} 4a + 2b \\ 3a - 6c \\ \hline \end{array}$$

Se obtienen los productos parciales de cada uno de los términos del segundo factor por el primer polinomio.

$$\begin{array}{r} 4a + 2b \\ 3a - 6c \\ \hline 12a^2 + 6ab \\ - 24ac - 12bc \\ \hline 12a^2 + 6ab - 24ac - 12bc \end{array}$$

Como en este ejemplo los productos parciales no tienen términos semejantes, el resultado queda:

$$(4a + 2b)(3a - 6c) = 12a^2 + 6ab - 24ac - 12bc$$

EJERCICIO 06: realiza los siguientes productos entre polinomios, escribe tu respuesta en el subrayado y entrega a tu catedrático(a).

1) $(-2x^2)(x^5 - 4x^2 + 3x + 1) =$

2) $(x^2 - 1)(5x^5) =$

3) $(-3x^3)(2x^4 - 3x^3 + 2x - x + 3) =$

4) $(5x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 2) =$

5) $(x^3 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) =$

6) $(x^3 + 2x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 1) =$

7) $(-x^3 + 4x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 4) =$

8) $(-3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 5x) (-5x^4) =$

9) $(4x^3 - 5x^2 + 2x + 1)(3x - 6) =$

10) $(-9x^2 + x + 5x^4)(3 - 2x^2) =$

11) $(3a^2 + 5a^2 - 4)(3a) =$

12) $(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)(2xy) =$

13) $(3x^2)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) =$

14) $(2x^2 - 3)(2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

15) $(-9x^2 + x + 5x^4)(3 - 2x^2) =$

DIVISIÓN ENTRE MONOMIOS

El proceso de dividir es el inverso al de multiplicar. Ya que, 3 por $2a = 6a$; $6a$ dividido $3 = 2a$ o $6a$ dividido $2 = 3a$.

En el momento que el divisor contiene una parte literal que se encuentra también en el dividendo, puede realizarse una simplificación de los términos, como sería en aritmética.

Por ejemplo:

$$\frac{6ab}{3a}$$

...este podrá escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{(2)(3a)(b)}{3a}$$

La simplificación del factor literal común, $3a$, en el numerador y en el denominador, deja $2b$ como respuesta para este problema de división.

$$\begin{aligned}\frac{14a^3b^3x}{-21a^2b^5x} &= \frac{(7)(2)a^2ab^3x}{(7)(-3)a^2b^3b^2x} \\ &= \frac{2a}{-3b^2} = -\frac{2a}{3b^2}\end{aligned}$$

En el momento que los mismos factores literales aparecen; tanto en el divisor como en el dividendo, pero con exponentes distintos, puede utilizarse aún la simplificación. Como se nos muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{14a^3b^3x}{-21a^2b^5x} &= \frac{2a^{3-2}b^{3-5}x^{1-1}}{-3} \\ &= \frac{2ab^{-2}}{-3} = \frac{2a}{-3b^2} \\ &= -\frac{2a}{3b^2}\end{aligned}$$

Ahora, veamos un ejemplo de simplificación:

$$\begin{array}{r} -20x^2y^3z \\ -5xy^2 \\ \hline -4 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \\ -5 \cdot x \cdot y \cdot y \end{array}$$

Simplificando los factores iguales, resulta:

$$+4xyz$$

...en este caso, el signo se determina por la regla de los signos de la división de enteros: signos iguales, resultado positivo; signos desiguales, el resultado es negativo.

El coeficiente es determinado por el cociente de los coeficientes. La parte literal se encuentra aplicando la regla de la división de potencias de igual base; una letra figura en el cociente con exponente igual a la diferencia entre el exponente con el que figura en el dividendo y el exponente con el que figura en el divisor.

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Para dividir un polinomio entre un monomio basta con dividir cada uno de los términos del dividendo entre el término del divisor.

Por ejemplo:

$$\frac{12x^4y + 8x^3y - 24x^2y}{4xy} = \frac{12x^4y}{4xy} + \frac{8x^3y}{4xy} - \frac{24x^2y}{4xy}$$

...aplicando la segunda ley de los exponentes se obtiene el resultado:

$$\frac{12x^4y + 8x^3y - 24x^2y}{4xy} = 3x^3 + 2x^2 - 6x$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO

La división algebraica se realiza de manera semejante a la numérica; y aplicando la ley de los exponentes y el algoritmo correspondiente es posible encontrar su cociente.

Si se tiene la división:

$$(-5x - 2x^2 + 12) \div (x + 4)$$

1. Se ordenan de manera decreciente los términos de los polinomios, quedando la división:

$$x + 4 \overline{) -2x^2 - 5x + 12}$$

2. Se obtiene el primer término del cociente dividiendo el primer término del dividendo entre el primer término del divisor:

$$\frac{-2x^2}{x} = -2x$$

3. Se anota como cociente y se multiplica por el divisor, se anotan los productos debajo del dividendo y se realiza la sustracción (sin olvidar el cambio de signo en el sustraendo).

$$\begin{array}{r} -2x + 3 \\ x + 4 \overline{) -2x^2 - 5x + 12} \\ \underline{+2x^2 + 8x} \\ 0 + 3x + 12 \end{array}$$

4. Se baja el siguiente término y se siguen los pasos anteriores.

$$\begin{array}{r} \frac{3x}{x} = 3 \\ -2x + 3 \\ \hline x + 4 \overline{) -2x^2 - 5x + 12} \\ + 2x^2 + 8x \\ \hline 0 \quad 3x + 12 \\ -3x - 12 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

EJERCICIO 07: resuelve los siguientes cocientes entre polinomios, escribe tu respuesta en el subrayado y entrega a tu catedrático(a).

$$1) \frac{4x^3yz - 3xy^2z^2 + 2xyz^2}{-4xyz} = \quad 2) \frac{-5x^2y^3z - 7x^3y^2z^2 + 3x^2y^5z^2}{3x^2y^2z} = \quad 3) \frac{-2x^2y^3z^3 + 3x^3y^4z^5 - 3x^2y^5z^4}{-7xy^3z^3} =$$

$$4) \frac{x^5}{x^6} =$$

$$5) \frac{a^9b^4}{a^6b^3} =$$

$$6) \frac{a^2bc^2}{abc} =$$

$$7) \frac{5a^4b}{10a^2b^3} =$$

$$8) \frac{10x^2y^3z^4}{-5xy^2z^3} =$$

$$9) \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$$

$$10) \frac{8x^6}{4x^4} =$$

$$11) \frac{-12x^3y^2z}{3xy} =$$

$$12) \frac{-18a^3b^4c^2}{-6a^3b^2c^2} =$$

$$13) \frac{4x^3 + 6x^2 - 8x}{2x} =$$

$$14) \frac{3x^3y^2 + 5x^2y - 6xy^2}{4x^2y} =$$

$$15) \frac{15x^4 - 7x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 3y^4}{5x^2 + xy - 3y^2} =$$

POLINOMIOS OPUESTOS

Dos polinomios son opuestos si al sumarlos todos sus términos se anulan.

Así, si $P(x) = 3x^2 + 4$ y $Q(x) = -3x^2 - 4$, entonces: $P(x) + Q(x) = [3x^2 + 4] + [-3x^2 - 4] = 3x^2 + 4 - 3x^2 - 4 = 0$, $Q(x)$ es el opuesto de $P(x)$.

Para conseguir el polinomio opuesto de $P(x)$, sólo tenemos que cambiar los signos de sus coeficientes. Lo representaremos por $-P(x)$.

EJERCICIO 08: escribe en los subrayados el polinomio $O(X)$ (opuesto) de cada uno de los polinomios que resultaron de las sumas y/o restas realizadas en el **EJERCICIO 04**.

1) $O(X) =$

2) $O(X) =$

3) $O(X) =$

4) $O(X) =$

5) $O(X) =$

6) $O(X) =$

7) $O(X) =$

8) $O(X) =$

9) $O(X) =$

10) $O(X) =$

11) $O(X) =$

12) $O(X) =$

13) $O(X) =$

14) $O(X) =$

15) $O(X) =$

PRODUCTOS NOTABLES

PROCESO ABREVIADO

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado.

Sin embargo, existen productos que responden a una regla cuya aplicación lleva al resultado más fácilmente; éstos reciben el nombre de Productos Notables. Algunos de ellos son los siguientes:

CUADRADO DE UN BINOMIO

La expresión algebraica que consta de dos términos se llama binomio y, al multiplicarse por sí misma, recibe el nombre de Binomio al Cuadrado.

Algunos ejemplos son los siguientes:

$$(a + b)^2 \quad (3x + y^2)^2 \quad (4ax + \frac{2}{3}m)^2$$

Si se obtiene la potencia $(a + b)^2$ con el procedimiento conocido, se tiene que:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

De donde se puede establecer lo siguiente:

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo.

Por ejemplo:

Obtener la potencia de:

$$(3a - 2b)^2$$

El cuadrado del primer término: $(3a)^2 = 9a^2$,

menos el doble del primer término por el segundo término $-2(3a \cdot 2b) = -12ab$,

más el cuadrado del segundo: $(2b)^2 = 4b^2$.

De donde se concluye que:

$$(3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

EJERCICIO 09: encuentra el cuadrado de los siguientes binomios desarrollando cada expresión, escribe tu respuesta en el subrayado de abajo y presenta a tu catedrático(a).

1) $(a + b)^2 =$ _____

4) $(5w + z)^2 =$ _____

7) $(7x - 2y)^2 =$ _____

10) $(o - 6)^2 =$ _____

13) $(3d^4 - 7e^3)^2 =$ _____

2) $(x - y)^2 =$ _____

5) $(6m - 7n)^2 =$ _____

8) $(8z + 3w)^2 =$ _____

11) $(r^6 + qz)^2 =$ _____

14) $(c^2 + f)^2 =$ _____

3) $(3a - 2b)^2 =$ _____

6) $(4b + 9c)^2 =$ _____

9) $(i^4 - 9k)^2 =$ _____

12) $(t^3 + 4v^2)^2 =$ _____

15) $(10d - h)^2 =$ _____

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

Se dice que dos binomios son conjugados cuando ambos tienen un término común y otro simétrico.

Ejemplos:

En $(a + b)(a - b)$, donde **a** es común, **b** y **-b** simétricos.

En $(3x + y^2)(3x - y^2)$, **3x** es común, **y²** y **-y²**, simétricos.

En $(-2x + 5y)(2x + 5y)$, **5y** es común, **-2x** y **2x**, simétricos.

Obteniendo el producto de $(a + b)(a - b)$ por el algoritmo conocido, se tiene que:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

De donde se puede concluir que:

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común menos al cuadrado del término simétrico.

Ejemplo:

Obteniendo el producto de $(2a + 5b)(-2a + 5b)$.

Se eleva al cuadrado el término común: $(5b)^2 = 25b^2$, menos el cuadrado del término simétrico: $-(2a)^2 = -4a^2$.

Por lo tanto:

$$(2a + 5b)(-2a + 5b) = 25b^2 - 4a^2$$

EJERCICIO 10: encuentra la solución de los siguientes binomios conjugados, desarrolla en hojas las operaciones de producto entre los paréntesis, para conocer qué términos se eliminan; escribe el subrayado los cuadrados que conforman tu binomio; y luego, preséntalo a tu catedrático(a).

1) $(x + 4)(x - 4) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

2) $(5x + 2y)(5x - 2y) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $25x^2 - 4y^2$

3) $(5x^2 + 3y^3)(5x^2 - 3y^3) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

4) $(3 + 8x)(3 - 8x) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

5) $(e - s)(e + s) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

6) $(5x + 6y)(5y - 6y) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

7) $(bc + ab)(bc - ab) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

8) $(a - b)(a + b) =$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$ Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$9) \left(3x + \frac{1}{4}\right)\left(3x - \frac{1}{4}\right) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$10) (3x + 2)(3x - 2) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$11) (4x + 4y)(4x - 4y) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$12) (7x + 2y)(7x - 2y) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$13) (5v + 4w)(5v - 4w) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$14) (3x - 2y)(3x + 2y) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

$$15) (x + 8)(x - 8) =$$

Cuadrado del primer término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Cuadrado del segundo término: $(\quad)^2 = \underline{\quad}$

Binomio: $\underline{\hspace{2cm}}$

Es importante que recuerdes la ley de signos menos por más es menos. Esto en los problemas 5, 8 y 14; al momento de encontrar el cuadrado del segundo término. Debes multiplicar por sí mismo el valor absoluto del término y luego multiplicar signos.

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO EN COMÚN

La expresión $(a + b)(a + c)$ indica el producto de dos binomios, donde **a** es el término común y **b** y **c** son los términos no comunes.

Algunos ejemplos de dos binomios con un término común son:

$(4x + 8)(4x - 6)$, donde **4x** es el término común.

$(3a + 2b)(4c + 3a)$, donde **3a** es el término común.

$(x + 3y)(-2b + 3y)$, donde **3y** es el término común.

Obteniendo el producto de $(a + b)(a + c)$ por medio del algoritmo tradicional, se tiene que...

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + c \\ \hline a^2 + ab \qquad ac + bc \\ \hline a^2 + ab + ac + bc \end{array}$$

$$a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b + c) + bc$$

Con lo cual se llega a la regla siguiente:

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más (o menos) el producto de la suma de los términos no comunes por el término común, más (o menos) el producto de los términos no comunes.

Ejemplo:

Obteniendo el producto de $(5x + 5)(5x - 8)$.

Se eleva al cuadrado el término común: $(5x)^2 = 25x^2$.

Más (o menos) el producto de la suma de los términos no comunes por el término común: $(5 - 8) 5x = 25x - 40x = -15x$.

Más (o menos) el producto de los términos no comunes: $(5)(-8) = -40$.

De donde se concluye que:

$$(5x + 5)(5x - 8) = 25x^2 - 15x - 40$$

La aplicación de las reglas para obtener los productos notables facilita el proceso de resolución y permite obtener el resultado más rápidamente.

EJERCICIO 11: con la ayuda de tu catedrático(a) debes de escribir 20 ejemplos de productos de dos binomios con un término en común, en tu cuaderno; y detalla la operatoria como en el ejemplo de arriba.

POLÍGONOS, CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

POLÍGONOS

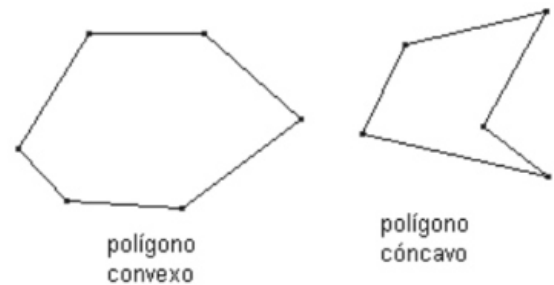
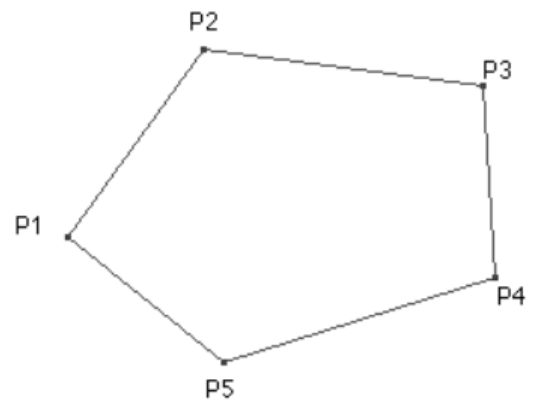
Polígono es la figura plana cerrada formada por n segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_nP_1}$ ($n \geq 3$) llamados lados, los P_1, P_2, \dots, P_n se llaman vértices.

El ángulo formado por dos lados adyacentes y que está en el interior de los polígonos se llama **ángulo interior**.

Diagonal de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

Diremos que un polígono es **convexo** si cada ángulo interior es menor que 180° . Un polígono es **cóncavo** si no es convexo.

Los polígonos convexos según el número de lados se llaman: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc.



Propiedades:

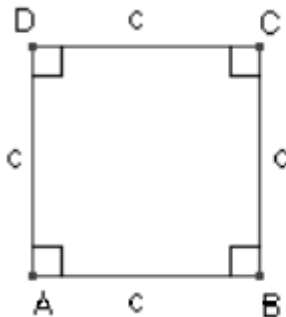
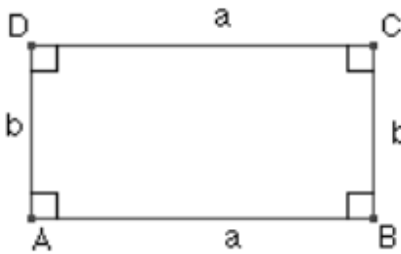
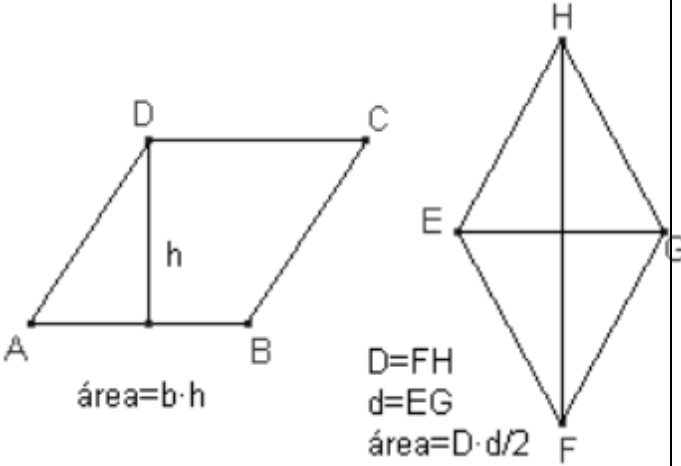
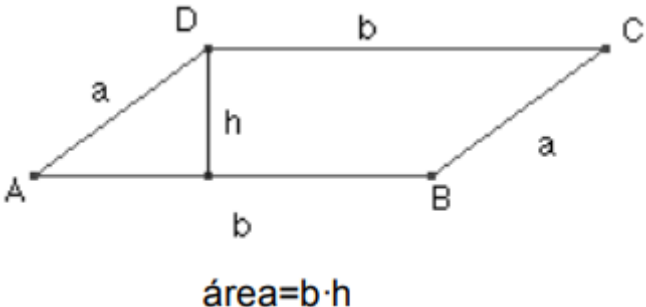
La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es: $180^\circ (n - 2)$.

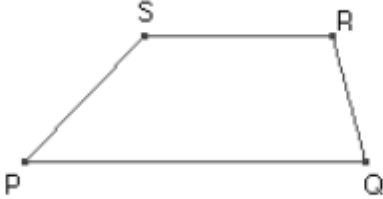
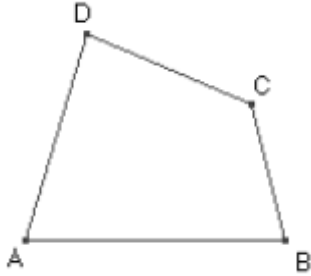
El número de diagonales de un polígono convexo es $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono convexo de 4 lados.

Clasificación:

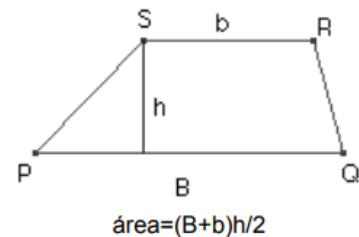
Paralelogramos si tienen los lados opuestos paralelos,	Cuadrado si tiene los 4 lados y los 4 ángulos iguales.	 $\text{área} = c^2$
	Rectángulo si tiene los 4 ángulos iguales y los lados iguales 2 a 2.	 $\text{área} = a \cdot b$
	Rombo si tiene los 4 lados iguales y los ángulos son iguales 2 a 2.	 $\text{área} = b \cdot h$ $D = FH$ $d = EG$ $\text{área} = D \cdot d / 2$
	Romboide si tiene los lados y los ángulos iguales 2 a 2.	 $\text{área} = b \cdot h$

No paralelogramos si no tienen los lados opuestos paralelos	Trapezio si tienen dos lados opuestos paralelos.	
	Trapezoide si ninguno de los lados opuestos son paralelos.	

El área de un paralelogramo es: $S = \text{base} \times \text{altura}$.

El área de un trapezio es:

$$S = \frac{(\text{Base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$



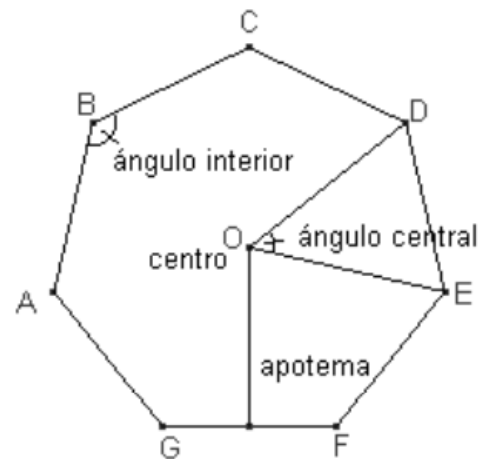
POLÍGONOS REGULARES

Polígono regular es el que tiene los lados y los ángulos interiores iguales.

La apotema del polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado.

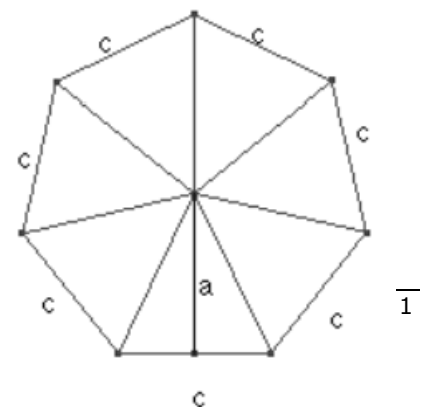
El ángulo central de un polígono regular de n lados mide:

$$\frac{360^\circ}{n}$$



ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

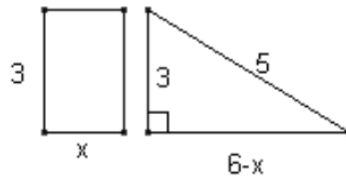
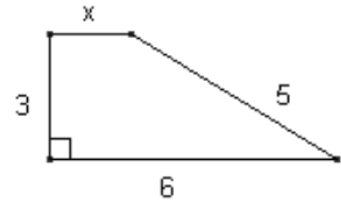
$$S = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$



EJERCICIO 12: realiza lo que se te pide a continuación en una hoja blanca bond.

a) Calcula el perímetro y el área del trapecio rectángulo.

Observamos que el trapecio rectangular se puede dividir en un rectángulo y un triángulo rectangular.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectangular:

$$5^2 = 3^2 + (6 - x)^2, \quad 25 = 9 + 36 - 12x + x^2, \quad x^2 - 12x + 20 = 0$$

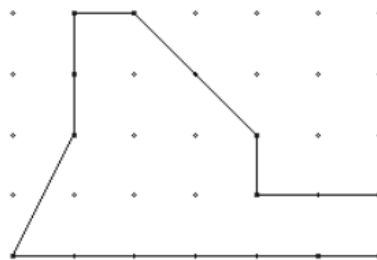
Resolvemos la ecuación, $x = 10$, $x = 2$. La solución $x = 10$ no es solución del problema ya que el lado del triángulo rectángulo sería: $6 - x = -4$.

El perímetro del trapecio es: $P = 6 + 5 + x + 3 = 16$

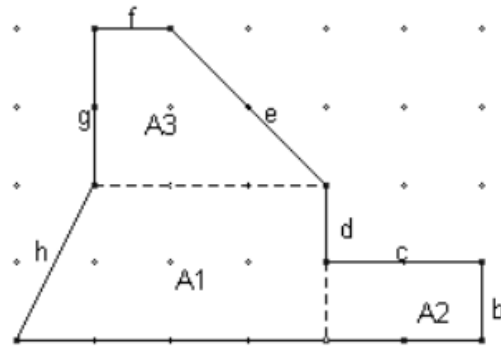
El área del trapecio es:

$$A = \frac{(6 + x) \cdot 3}{2} = \frac{(6 + 2) \cdot 3}{2} = 12$$

b) Calcula el área y el perímetro de la figura siguiente:



Observamos que la figura está cuadriculada. Dividiremos la figura en polígonos tales que podamos calcular el área y el perímetro:



Hemos dividido la figura en dos trapezios rectangulares y un rectángulo de bases y alturas conocidas. El área será la suma de las áreas de los tres polígonos:

$$A = A1 + A2 + A3 = \frac{(4+3) \cdot 2}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{(3+1) \cdot 2}{2} = 13$$

El perímetro es: $P = a + b + c + d + f + g + h$

Para calcular las medidas de los segmentos e, h aplicaremos el **Teorema de Pitágoras**.

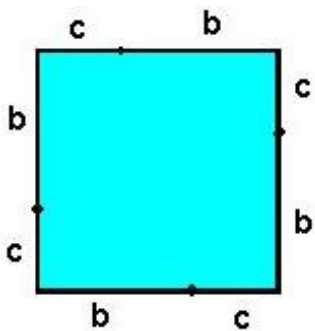
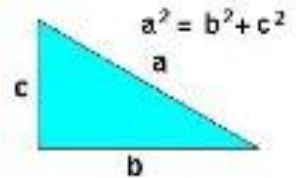
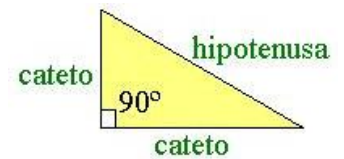
$$e = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, h = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$P = a + b + c + d + f + g + h = 6 + 1 + 2 + 1 + \sqrt{8} + 1 + 2 + \sqrt{5} = 13 + \sqrt{8} + \sqrt{5} \cong 18'06$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

En primer lugar deberíamos recordar un par de ideas:

- ✓ Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto, es decir de 90° .
- ✓ En un triángulo rectángulo, el lado más grande recibe el nombre de **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**.



Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración:

Si tenemos un triángulo rectángulo como el del dibujo del enunciado del teorema podemos construir un cuadrado que tenga de lado justo lo que mide el cateto **b**, más lo que mide el cateto **c**, es decir, **b+c**, como en la figura de la derecha.

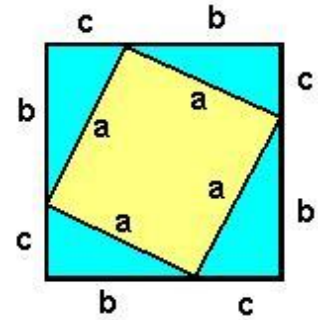
El área de este cuadrado será $(b+c)^2$.

Si ahora trazamos las hipotenusas de los triángulos rectángulos que salen tendremos la figura de la izquierda. El área del cuadrado, que es la misma de antes, se puede poner ahora como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos azules (base por altura partido por 2):

$$\frac{b \cdot c}{2}$$

más el área del cuadrado amarillo a^2 . Es decir, el área del cuadrado grande también es el área del cuadrado pequeño más 4 veces el área del triángulo:

$$a^2 + 4 \frac{b \cdot c}{2} = a^2 + 2bc$$



Podemos igualar las dos formas de calcular el área del cuadrado grande y tenemos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc$$

si ahora desarrollamos el binomio, nos queda:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

que después de simplificar resulta lo que estábamos buscando:

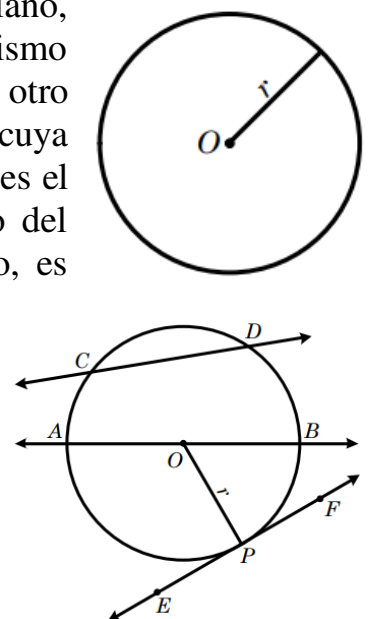
$$b^2 + c^2 = a^2$$

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un mismo plano, que están a una distancia dada, de un punto dado, situado en el mismo plano. El punto dado se llama **centro** de la circunferencia. Dicho de otro modo. La **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya la distancia de otro del plano (centro) es constante (radio). El **círculo** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a otro punto del plano (centro) es igual o menor a un segmento dado llamado radio, es decir, los puntos del círculo son los de la circunferencia y los interiores a la circunferencia.

La figura siguiente muestra una circunferencia de radio r y centro en el punto O .

Algunos elementos en la circunferencia



Algunos de los elementos geométricos que se relacionan con la circunferencia son:

Cuerda: Es un segmento cuyos puntos extremos están sobre la circunferencia. En la figura de abajo los segmentos AB y CD son cuerdas.

Diámetro: Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. En la figura AB es un diámetro.

Secante: Es una recta que contiene a una cuerda. En la figura las rectas \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} son secantes.

Tangente: Es una recta que se encuentra en el mismo plano que la circunferencia y que la interseca solamente en un punto.

El punto de intersección se llama punto de tangencia. Una recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. En la figura la recta \overleftrightarrow{EF} es tangente a la circunferencia en el punto P , por lo tanto el radio OP es perpendicular a la recta tangente en P .



Otros elementos de una circunferencia.

Cuerda: es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro.

Arco: de circunferencia es cada una de las partes en que la cuerda divide la circunferencia.

ÁREA Y PERÍMETRO

Las expresiones para calcular el área del círculo y el perímetro de la circunferencia son:

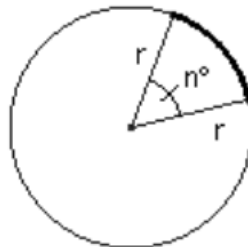
$$A = \pi r^2$$

$$P = 2\pi r$$

LONGITUD Y ÁREA DE FIGURAS CIRCULARES

Longitud del arco de circunferencia:

$$L_{\text{arco}} = \frac{L_{\text{circunferencia}} \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot r \cdot n^\circ}{360^\circ}$$



ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

Un **sector de circunferencia** es la región de círculo limitada por dos radios y un arco de circunferencia.

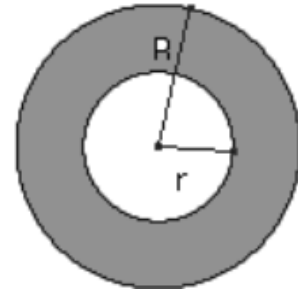
$$S_{\text{sector}} = \frac{\text{Área círculo} \cdot n^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^{\circ}}{360^{\circ}}$$



ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR

Una **corona circular** es la región de plano limitada por dos circunferencias concéntricas.

$$S_{\text{corona}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$



EJERCICIO 13. Autoaprendizaje.

a) Calcula el área y el perímetro de un sector circular de 30° y de radio 10.

Aplicando la fórmula el área es:

$$A = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 30^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{25 \cdot \pi}{3} \cong 26'18$$

El perímetro es igual a la longitud del arco que determina el sector y los dos radios.

$$\text{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 30^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{5 \cdot \pi}{3}$$

Por tanto el perímetro es:

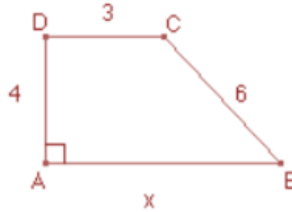
$$P = 2r + \text{arco} = 2 \cdot 10 + \frac{5 \cdot \pi}{3} = 20 + \frac{5 \cdot \pi}{3} \cong 25'24$$

EJERCICIO 14. Lee detenidamente cada uno de los siguientes problemas, y desarrolla en hojas (en blanco bond). Por el grado de dificultad de los problemas, es recomendable que investigues para hallarles la solución correcta a cada uno (de los problemas).

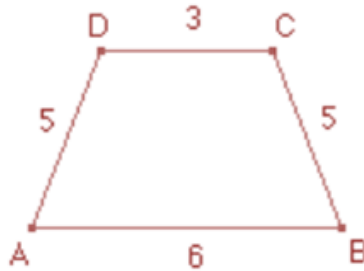
1. Calcula el ángulo central y el ángulo interior de los siguientes polígonos regulares:

- a) Decágono. b) Dodecágono. c) Polígono de 15 lados.

2. Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de 20 lados. ¿Cuántas diagonales tiene?
3. El área de un cuadrado misura 20cm^2 , calcula el perímetro.
4. El área de un rectángulo es 20cm^2 y un lado mide 10cm. Calcula el perímetro y la diagonal del cm rectángulo.
5. El área de un trapecio isósceles (los lados no paralelos iguales) es 20cm^2 las bases miden 7cm, 3cm respectivamente. Calcula la altura y el perímetro del trapecio.
6. Determina el área y el perímetro del siguiente trapecio rectángulo:

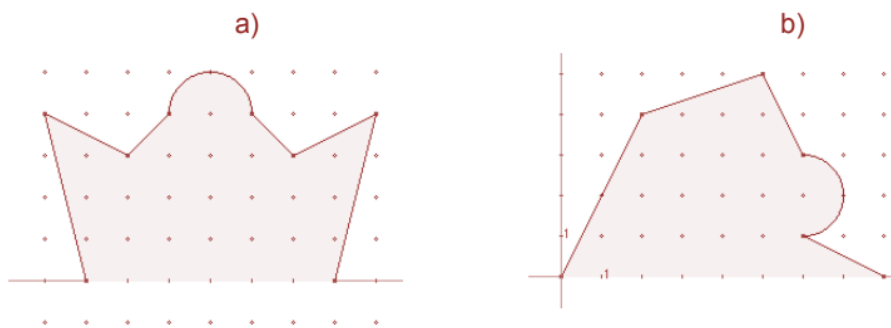


7. Determina el área y la altura del siguiente trapecio isósceles:

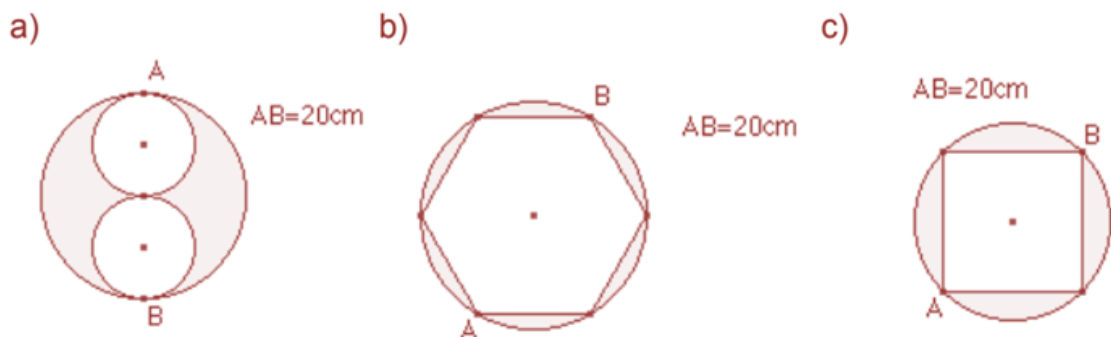


8. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 12 cm respectivamente. Calcula la medida de un lado.
9. Las medidas de la circunferencia máxima de dos pelotas de fútbol oscilan entre 68 cm y 71 cm. ¿Entre qué valores varían los radios de estas pelotas?
10. Calcula el radio de la Tierra en km, suponiéndola esférica y sabiendo que el ecuador tiene aproximadamente 40.000 km.
11. Calcula la medida de un arco de circunferencia de 45° sabiendo que el radio de la circunferencia mide 5 cm.

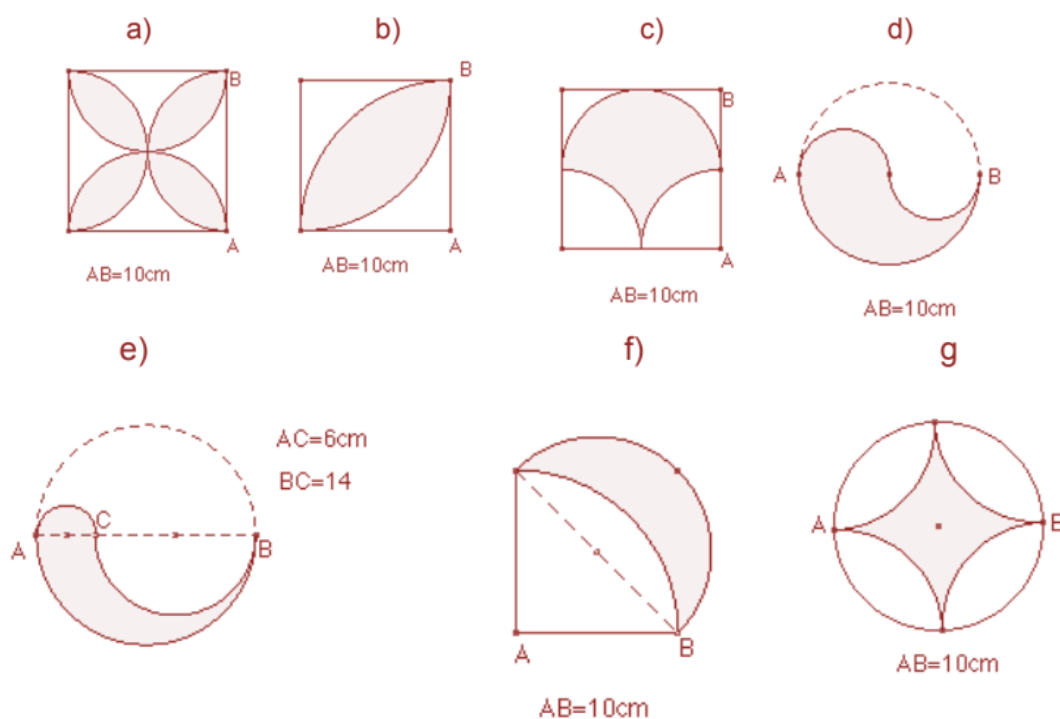
- 12.** Una circunferencia de radio 5 cm tiene un arco que mide 10 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que abarca este arco?
- 13.** La longitud de una circunferencia es 10 cm. Calcula el área del círculo.
- 14.** El área de un círculo es 20cm^2 . Calcula la longitud de la circunferencia.
- 15.** Un cuadrante de circunferencia mide 15 cm. ¿Cuánto mide el radio y el área del sector que determina?
- 16.** Calcula el área y el perímetro de la figura sombreada:



- 17.** Calcula el área y el perímetro de la figura sombreada:



- 18.** Calcula el área y el perímetro de la figura sombreada:



INFORMACIÓN (INCLUIDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:**Sitios web:**

1. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapII/2_1_def.htm
2. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapII/2_3_sign.htm
3. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapII/2_4_term.htm
4. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapII/2_5_clasif.htm
5. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapII/2_9_val.htm
6. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapIII/3_1_suma.htm
7. <http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/polinomios.html>
8. <https://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/pitagoras/teorema.htm>
9. <http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas23.htm>
10. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_cat_expressions_algebraiques/2esoquincena5.pdf
11. http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U08_L2_T2_text_final_es.html
12. http://calculo.cc/Problemas/Problemas_bachillerato/primeros_ciencias_sociales/polinomios/polinomios_1.html
13. http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/hb028/ged/areas/mate/ecuacion/ev_expr.htm#
14. http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/hb028/ged/areas/mate/ecuacion/ejemplos/ej_expr.htm
15. http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso3/htmlb/SEC_28.HTM
16. http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso3/htmlb/SEC_29.HTM
17. <http://www.vadenumeros.es/tercero/ejercicios-de-polinomios.htm>
18. <http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/operacion/multipol.htm>
19. <http://10ejemplos.com/10-ejemplos-de-binomios-cuadrados>
20. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapIII/3_5_2_bin_conj.htm
21. http://www.eplc.umich.mx/salvadors/matematicas1/contenido/CapIII/3_4_mult.htm
22. <http://www.sbpprogram.com/espanol/matematicas-en-la-escuela/5-ejemplos-de-binomios-conjugados.htm>
23. <http://apuntes.celeberrima.com/ejemplos-binomios-conjugados-productos-notables/>
24. http://www.vitutor.com/ab/p/a_6.html
25. <http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso15poligonos.pdf>
26. <http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/2.4-La-circunferencia-y-el-circulo.pdf>